ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
ΔΙΚΤΑΙΟΥ ΑΝΤΡΟΥ 3, 71201
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΗΛ. – Fax : 2810-288478
e-mail : info@math-her.gr

Ενδεικτικές απαντήσεις στα Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα 1^{o}

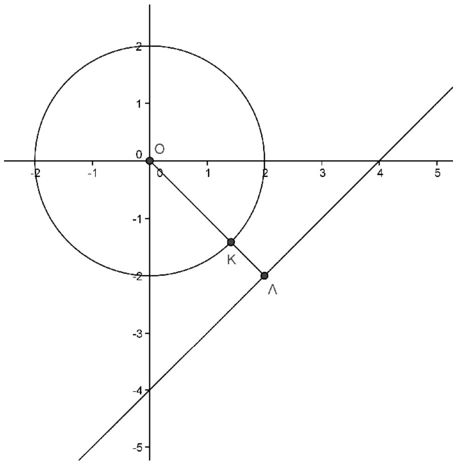
Α1) Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 235
Α2) Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 191
Β) α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα 2^{o}

α) Η σχέση $\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6$ γράφεται: $\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6 \Rightarrow \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}\,|z|=6 \Rightarrow 3|z|=6 \Rightarrow |z|=2$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.

β) Λόγω της δοσμένης σχέσης, ο w κινείται στη μεσοκάθετο ε του τμήματος με άκρα τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,-3) της οποίας θα βρούμε την εξίσωση. Επειδή $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB}=-1$ και $\lambda_{AB}=\frac{-3+1}{3-1}=-1$, άρα $\lambda_\varepsilon=1$. Επίσης η ε περνάει από το μέσον Μ του ΑΒ που έχει συντεταγμένες Μ(2,-2). Άρα η ευθεία ε έχει εξίσωση $y+2=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow \boxed{x-y-4=0}$.

Παρατήρηση: Τα ερωτήματα α, β μπορούν να λυθούν με την αντικατάσταση των μιγαδικών z και w από τους z=x+yi και w=α+βi, όμως προτείνουμε την αποφυγή αυτού του τρόπου όταν είναι δυνατόν.



γ) Το |w| γεωμετρικά παριστάνει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού w από την αρχή των αξόνων Ο. Άρα η ελάχιστη τιμή του |w| είναι η απόσταση του σημείου Ο(0,0) από την ευθεία ε. Άρα: $|w|_{\min}=O\Lambda=d(O(0,0),\varepsilon)=\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$.

δ) Ο z κινείται στον κύκλο |z|=2 και ο w στην ευθεία ε. Επειδή $d(O(0,0),\varepsilon)=2\sqrt{2}>2=\rho$, άρα ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Το |z-w| γεωμετρικά παριστάνει την απόσταση των δύο μιγαδικών, η οποία επιτυγχάνεται όταν οι εικόνες των z, w συμπέσουν στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα. Άρα : $|z-w|_{\min}=K\Lambda=O\Lambda-OK=2\sqrt{2}-2$.

Παρατήρηση: Λύσεις του συγκεκριμένου ερωτήματος με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας είναι μεν σωστές αλλά **ελλιπείς** εάν δε βρούμε **συγκεκριμένους** μιγαδικούς αριθμούς z,w για τους οποίους η τιμή $2\sqrt{2}-2$ επιτυγχάνεται.

Θέμα 3ο

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[0,+\infty)$.

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0,$ και από την άλλη f(0)=0. Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

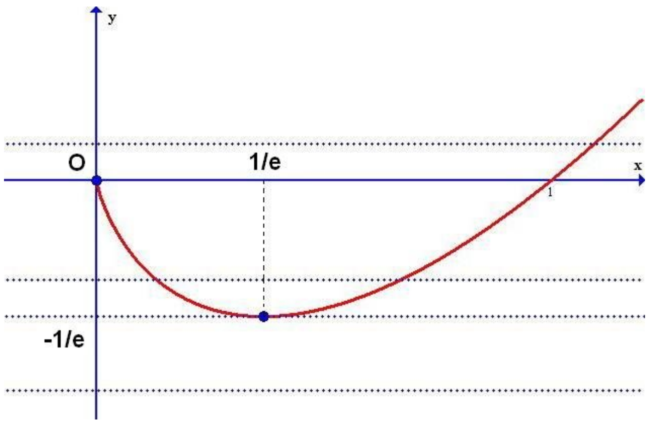
β) Για x>0 f΄(x)=lnx+1. Η ρίζα της f΄ είναι $x=e^{-1}$. Επίσης $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e^{-1}$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e^{-1}$.

Ο πίνακας λοιπόν μεταβολών της f φαίνεται δίπλα. (αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της εν λόγω συνάρτησης στο 0, πράγμα που δεν χρειάζεται να αποδειχθεί από τους μαθητές αλλά για λόγους πληρότητας θεωρούμε ότι πρέπει να το βάλουμε στον πίνακα μεταβολών της f).

x	-∞ 0		1/e	+∞
f′		−	0	+
f		↘		↗

Αφού f΄(x) < 0 στο $(0,e^{-1})$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[0,e^{-1}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[\,f(e^{-1}),\,f(0)]=[-e^{-1},0]$. Όμοια, αφού f΄(x) > 0 στο $(e^{-1},+\infty)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[e^{-1},+\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\left[\,f(e^{-1}),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-e^{-1},+\infty)$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$. Τελικά, λόγω συνέχειας και θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, το σύνολο τιμών της f(x) είναι το $[-e^{-1},+\infty)$

γ) Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\alpha = x\ln x$ (1). Ζητείται λοιπόν το πλήθος των διαφορετικών σημείων στα οποία η οριζόντια ευθεία y=α, τέμνει την συνάρτηση f(x), x>0. Κάνοντας μία πρόχειρη γραφική παράσταση και με τη βοήθεια του πίνακα μεταβολών της f, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις. Εάν:



- $\alpha<-e^{-1}$, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει καμία ρίζα λόγω του συνόλου τιμών.
- $\alpha=-e^{-1}$, τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα (την $x=e^{-1}$).
- $-e^{-1}<\alpha<0$, τότε έχουμε δύο διαφορετικές ρίζες (μία στο διάστημα $(0,e^{-1})$ και μία στο διάστημα $(e^{-1},+\infty)$.
- Εάν α=0, τότε έχουμε μία θετική ρίζα (την προφανή ρίζα x=1).
- Εάν α>0, τότε έχουμε ακριβώς μία ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(e^{-1},+\infty)$.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [x,x+1] (Οι συνθήκες του θεωρήματος ικανοποιούνται όταν x>0) συνεπώς υπάρχει $\xi=\xi(x)\in(x,x+1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$ (Το ξ **δεν** είναι σταθερό αλλά αλλάζει κάθε φορά που αλλάζει το x). Επίσης για x>0, έχουμε $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς λόγω της σχέσης ξ<x+1, παίρνουμε $f'(\xi)<f'(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$, που είναι και το ζητούμενο.

Παρατήρηση: Η συγκεκριμένη ανισότητα μπορεί επίσης να αποδειχθεί, μελετώντας κατάλληλη συνάρτηση.

<u>Θέμα 4ο</u>

α) Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(t)dt$ είναι πραγματικός αριθμός. Έστω λοιπόν ότι $\int_0^2 f(t)dt=c$ (1). Όμως τότε $f(x)=(10x^3+3x)c-45$.

Επίσης $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\left[(10t^3+3t)c-45\right]dt=\left[c\left(10\frac{t^4}{4}+3\frac{t^2}{2}\right)-45t\right]_0^2=46c-90$, οπότε λόγω της (1) παίρνουμε $c=46c-90\Leftrightarrow c=2$. Άρα τελικά $f(x)=(10x^3+3x)\cdot 2-45=20x^3+6x-45$.

β) $g''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}\overset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{g'(x-u)-g'(x)}{-u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-u)}{u}$

(*) Θέτουμε όπου h το -u και έτσι όταν $h\to 0$, έχουμε $u\to 0$.

γ i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)+g(x-h)-g(x)}{h^2}\underset{(*)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)+g'(x-h)\cdot(-1)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right)$$

$$\overset{(\beta)}{=}\frac{1}{2}\left(g''(x)+g''(x)\right)=g''(x)$$

(*) Παραγωγίζουμε ως προς h. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης g, το όριο του αριθμητή είναι 0, άρα πράγματι είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του De L' Hospital.

Έτσι, η δοσμένη σχέση γίνεται $g''(x)=f(x)+45=20x^3+6x$. Άρα $g'(x)=20\frac{x^4}{4}+6\frac{x^2}{2}+c_1=5x^4+3x^2+c_1$ η οποία για x=0 δίνει $g'(0)=c_1\Leftrightarrow c_1=1$, άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+1$. Συνεπώς $g(x)=5\frac{x^5}{5}+3\frac{x^3}{3}+x+c_2=x^5+x^3+x+c_2$, η οποία για x=0 δίνει $g(0)=c_2\Leftrightarrow c_2=1$, άρα $\boxed{g(x)=x^5+x^3+x+1}$.

ii) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο **R** με $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$. Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Παρατήρηση: Για το συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί κάποιος να δείξει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα με τη βοήθεια του ορισμού.

Σχόλια για τα θέματα

Συνιστούμε **ιδιαίτερη προσοχή** στην παρατήρηση του Θέματος 2 στο ερώτημα (δ). Θεωρούμε ότι το ερώτημα (γ) του θέματος 3, εμπεριέχεται στη βασική μεθοδολογία επίλυσης παραμετρικών εξισώσεων με μεθόδους του διαφορικού λογισμού και το 4^o θέμα απαιτούσε βαθιά κατανόηση της ύλης.

Τα φετινά θέματα απαιτούσαν πολύ καλή γνώση της θεωρίας και κατανόηση σε βάθος όλων των διδαχθέντων μαθηματικών εννοιών της ύλης. Μοναδικό μειονέκτημα κατά τη γνώμη μας, ήταν η απουσία ερωτημάτων που αναφέρονται σε βασικά θεωρήματα της ύλης με τη βοήθεια των οποίων αντιμετωπίζονται αρκετές ασκήσεις του σχολικού βιβλίου. Εκτιμούμε όμως ότι η στροφή των θεμάτων προς τη βαθιά κατανόηση της ύλης (σε αντίθεση με θέματα τεχνικής) συμβάλλει στην ποιότητα καθώς επίσης και στην καλυτέρευση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Τα θέματα επεξεργάστηκαν οι Μαθηματικοί και μέλη του Δ.Σ. του Παραρτήματος Ηρακλείου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας:

Βαρβεράκης Ανδρέας
Παυλάκος Περικλής
Σαρτζετάκης Λευτέρης
Συγκελάκης Αλέξανδρος